

## Секція 4. ХІМІЧНІ, ФІЗИЧНІ, МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕНЬ ЯКОСТІ ПРОДУКТІВ ХАРЧУВАННЯ

УДК 664.64.016.3

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СМЕСИ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

**Н.И. Погожих, Д.А. Торяник**

*Рассмотрены проблемы определения физических свойств многокомпонентной смеси в процессе производства пищевых продуктов. Предложен алгоритм физико-математического моделирования процесса смешивания и теоретического нахождения свойств смеси по известным физическим свойствам исходных компонентов продукта. Показана принципиальная возможность определения свойств смеси без проведения эксперимента.*

**Ключевые слова:** смешивание, физико-математическое моделирование, физические свойства смеси.

### ВИЗНАЧЕННЯ ФІЗИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ СУМІШІ В ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСАХ

**М.І. Погожих, Д.О. Торяник**

*Розглянуто проблеми визначення фізичних властивостей багатокомпонентної суміші в процесі виробництва харчових продуктів. Запропоновано алгоритм фізико-математичного моделювання процесу змішування і теоретичного знаходження властивостей суміші за відомими фізичними властивостями початкових компонентів продукту. Показана принципова можливість визначення властивостей суміші без проведення експерименту.*

**Ключові слова:** змішування, фізико-математичне моделювання, фізичні властивості суміші.

### DETERMINATION OF PHYSICAL PROPERTIES OF THE MIXTURE IN TECHNOLOGICAL PROCESSES

**M. Pogozhikh, D. Torianik**

*Most of technological processes used in the food industry are based on mixing processes that are main in food products' manufacture. The result of mixing is a product with unknown physicochemical properties, determined by the*

*components, which are to be mixed, and the interaction between them. Experimental definition of these properties is related with both time and material costs. If the initial properties of the components are known, it is advisable to use them to determine the properties of the product obtained without carrying out the experiment, i.e. by theoretical physico-mathematical modeling using computer technology. From the mathematical point of view, this means restoration of the form of some unknown function that determines physical properties of the final or intermediate product, according to the known functions of the properties of the components.*

*The aim of the study is to develop an algorithm and theoretical methods for determining physical properties of a mixture in technological processes used in the food industry, based on the known properties of the mixing components.*

*The studies allow to assume that the offered method of physical and mathematical modelling is a powerful tool for researching both ready-made mixtures and their properties during their preparation. The principal possibility of determining physical properties of a mixture based on known properties of blended components is shown, an algorithm for this determination has been developed and its effectiveness in determining the density and temperature of the mixture has been verified.*

***Keywords:** mixing, physical and mathematical modelling, physical properties of the mixture.*

**Постановка проблемы в общем виде.** В основе большинства технологических процессов, которые используются в пищевой промышленности, лежат процессы смешивания, нагревания и т.п. Процесс смешивания является базовым в пищевой промышленности, и приготовление любого пищевого продукта чаще всего сопровождается операцией смешивания различных компонентов, имеющих определенные свойства, которые в большинстве случаев известны. Это могут быть жидкости, газы, сыпучие материалы, твердые тела и различные их сочетания. Смешивание может сопровождаться процессами растворения, образования эмульсий, суспензий и т.д. В смесях могут протекать разнообразные химические реакции, кардинально меняющие свойства продукта. Но в любом случае результатом смешивания является продукт, физико-химические свойства которого новые и часто неизвестные, но определяются смешиваемыми компонентами и взаимодействием между ними. Экспериментальное определение этих свойств связано как с временными, так и с материальными затратами. Если исходные свойства компонентов известны, то целесообразно использовать их для определения свойств полученного продукта без проведения эксперимента, то есть путем теоретического физико-математического моделирования с использованием компьютерной техники. С математической точки зрения это означает восстановление вида

некоторой неизвестной функции, определяющей физические свойства конечного или промежуточного продукта по известным функциям свойств компонентов.

#### **Анализ последних исследований и публикаций.**

Отечественная и зарубежная литература изобилует публикациями, которые посвящены исследованию процесса смешивания, как части производственного процесса изготовления пищевых продуктов, так и самостоятельного процесса. Однако абсолютное большинство статей рассматривают проблемы, связанные либо с экспериментальным определением параметров готовой смеси [1–3], качества полученной смеси [4] либо с аппаратным обеспечением конкретного процесса смешивания [5; 6]. Моделированию смешивания посвящено значительно меньше статей, причем моделируется процесс смешивания каких-либо конкретных компонентов на каком-либо конкретном оборудовании [7; 8].

**Целью статьи** является разработка алгоритма и теоретических методов определения физических свойств смеси в технологических процессах, использующихся в пищевой промышленности, по известным свойствам смешивающихся компонентов.

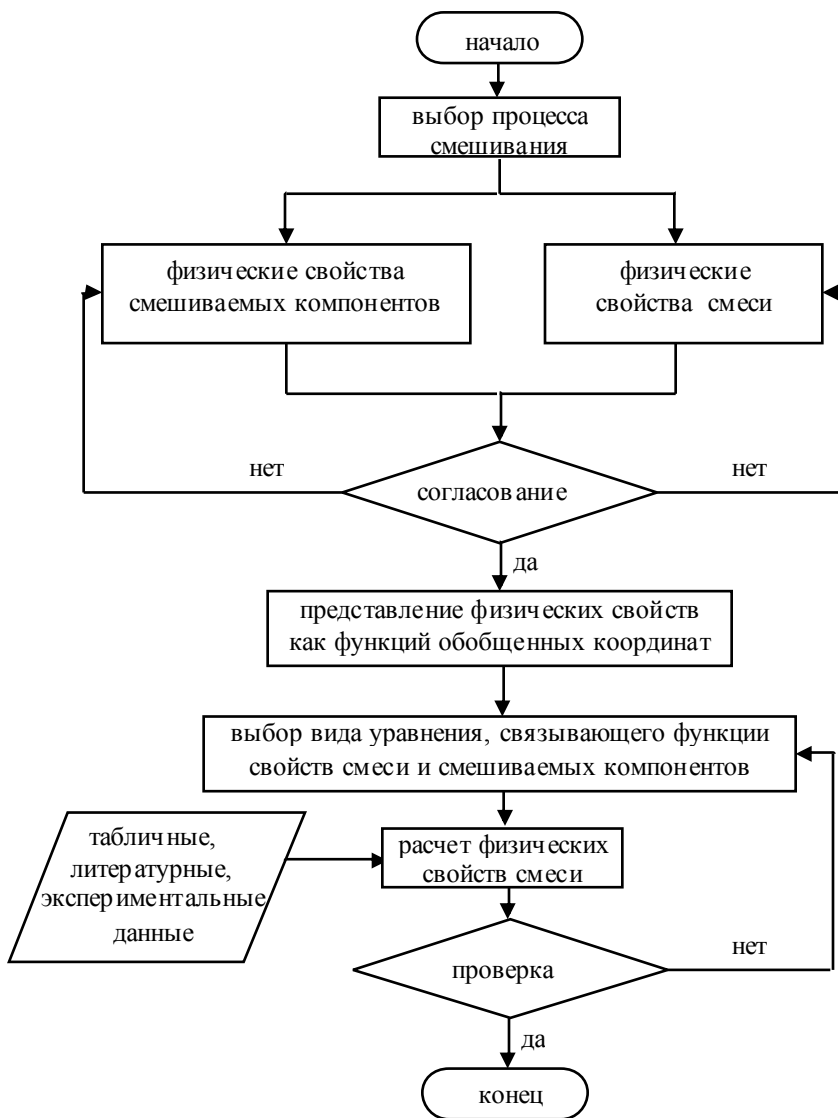
#### **Изложение основного материала исследования.**

Предположим, что вид процесса смешивания и физические свойства, которые необходимо определить, установлены. Рассмотрим две изолированные произвольные области пространства, имеющие объемы  $V_1$  и  $V_2$ , в которых заданы функции  $f_1(q)$  и  $f_2(q)$  одних и тех же обобщенных координат  $q$ , определяющие некоторый один и тот же физический параметр областей. Объединим эти области в одну с объемом  $V$ . Исходя из того, что все физические величины либо аддитивны (масса, энергия, заряд и др.), либо могут быть выражены через аддитивные величины, предположим, что существуют такие операторы, для которых справедливо равенство:

$$f(q) = \hat{A}f_1(q) + \hat{B}f_2(q), \quad (1)$$

где  $f(q)$  – неизвестная функция, определяющая один и тот же параметр объединенной области;  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  некоторые операторы, осуществляющие преобразование функций  $f_1(q)$  и  $f_2(q)$ .

Схема данного алгоритма теоретического определения неизвестных физических свойств смеси приведена на рис. 1.



**Рис. 1. Схема алгоритма теоретического определения физических свойств смеси**

Рассмотрим некоторые применения равенства (1), подтверждающие справедливость алгоритма, приведенного выше.

Пусть необходимо смешать два вещества, имеющие разные известные плотности и сосредоточенные в объемах  $V_1$  и  $V_2$ . В результате получим смесь, занимающую объем  $V$ , с неизвестной плотностью. При этом всегда выполняется равенство:

$$V = V_1 + V_2 \pm \Delta V,$$

где  $\Delta V$  учитывает изменение объема смеси.

Плотность не является аддитивной величиной, и плотность целого не равна сумме плотностей частей. Выразим плотность через аддитивную величину – массу. Согласно закону сохранения массы имеем

$$m = m_1 + m_2,$$

где  $m$  – масса вещества в объеме  $V$ ;  $m_1$  и  $m_2$  массы веществ, сосредоточенных в объемах  $V_1$  и  $V_2$  соответственно.

Если во всех объемах вещество распределено равномерно, то плотности постоянны. Обозначив их через  $\rho$ ,  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , получаем

$$\rho V = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2,$$

отсюда

$$\rho = \frac{V_1}{V} \rho_1 + \frac{V_2}{V} \rho_2.$$

Обозначив  $\frac{V_1}{V} = \hat{A}$  и  $\frac{V_2}{V} = \hat{B}$ , получаем равенство (1). Оно легко обобщается на случай произвольного числа компонентов

$$\rho = \sum_i \hat{A}_i \rho_i.$$

Данное равенство будет справедливо при смешивании газов или жидкостей, растворении твердого тела в жидкости или смеси жидкостей без существенных химических превращений. При смешивании сыпучих компонентов и определении насыпной плотности необходимо учитывать дисперсность систем, что приведет к появлению поправочных коэффициентов и не нарушит общности.

Если распределение плотности в объеме неоднородно, то плотность является функцией координат и масса вещества, ограниченного замкнутой областью пространства, выражается тройным интегралом по объему этой области

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dV. \quad (2)$$

Для нашего случая имеем

$$\iiint_V \rho(x, y, z) dV = \iiint_{V_1} \rho_1(x, y, z) dV + \iiint_{V_2} \rho_2(x, y, z) dV,$$

где  $\rho(x, y, z)$ ,  $\rho_1(x, y, z)$  и  $\rho_2(x, y, z)$  – объемные плотности распределения массы в объемах  $V$ ,  $V_1$  и  $V_2$  соответственно.

Обозначив операторы интегрирования по объемам  $V$ ,  $V_1$  и  $V_2$  соответственно через  $\hat{I}$ ,  $\hat{I}_1$  и  $\hat{I}_2$ , получим

$$\hat{I}\rho(x, y, z) = \hat{I}_1\rho_1(x, y, z) + \hat{I}_2\rho_2(x, y, z).$$

Разделив обе части уравнения на  $\hat{I}$ , получим выражение для плотности вещества заключенного в объеме  $V$  в символьном виде

$$\rho(x, y, z) = \frac{\hat{I}_1}{\hat{I}} \rho_1(x, y, z) + \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}} \rho_2(x, y, z), \quad (3)$$

что также согласуется с (1). Здесь под делением на оператор  $\hat{I}$  понимается нахождение решения интегрального уравнения. Равенство (3) также будет справедливо при смешивании любого количества компонентов:

$$\rho(x, y, z) = \sum_i \frac{\hat{I}_i}{\hat{I}} \rho_i(x, y, z).$$

Если смешивание компонентов сопровождается химическими реакциями либо продолжается определенное время, в течении которого необходимо контролировать параметры смеси, то плотность кроме зависимости от координат еще и меняется со временем. При объединении нескольких объемов с разными плотностями в один возникает поток массы через поверхность раздела областей  $S$

$$J = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS ,$$

где  $\mathbf{F}$  – векторное поле, создаваемое градиентом плотности в диффузионных процессах либо полем скоростей частиц в конвективных процессах;  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к внешней стороне поверхности  $S$ . Этот поток численно равен массе вещества, проходящего через поверхность  $S$  в единицу времени. Если поверхность  $S$  замкнута, то в силу теоремы Остроградского-Гаусса имеем

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV ,$$

что дает возможность связать изменение массы со временем в объеме с дивергенцией векторного поля

$$\frac{dm}{dt} = - \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV .$$

Используя формулу (2), получаем

$$\iiint_V \frac{d\rho}{dt} dV = - \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

и приходим к известному уравнению Фика

$$\frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{F} .$$

При смешивании двух компонентов имеем

$$m = m_1(t) + m_2(t) = \text{const}$$

и

$$\frac{dm_1}{dt} + \frac{dm_2}{dt} = 0,$$

тогда

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho(x, y, z) dV = \frac{d}{dt} \iiint_{V_1} \rho_1(x, y, z) dV + \frac{d}{dt} \iiint_{V_2} \rho_2(x, y, z) dV = 0,$$

что свидетельствует о наличии двух взаимно проникающих потоков массы

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_1} \rho_1(x, y, z) dV = - \frac{d}{dt} \iiint_{V_2} \rho_2(x, y, z) dV.$$

Нередко процесс смешивания сопровождается нагреванием либо смешиваемые компоненты имеют разные температуры. Тогда наряду с потоком массы возникает поток тепла, направленный от более нагретой компоненты к менее нагретой. В простейшем случае постоянных температур смешиваемых компонент  $T_1$  и  $T_2$  имеем

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= c_1 m_1 (T - T_1), \\ \Delta Q_2 &= c_2 m_2 (T - T_2), \end{aligned}$$

где  $T$  – температура смеси.

Поскольку в условиях теплового баланса

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0,$$

то температура смеси

$$T = \hat{A}T_1 + \hat{B}T_2,$$



где операторы  $\hat{A} = \frac{c_1 m_1}{c_1 m_1 + c_2 m_2}$ ,  $\hat{B} = \frac{c_2 m_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2}$ , и полностью

соответствует формуле (1). Очевидно, что суть формулы не изменится при смешивании не двух, а большего количества компонентов.

**Выводы.** Проведенные исследования позволяют предположить, что предложенный метод физико-математического моделирования является мощным средством исследования как готовых смесей, так и их свойств во время приготовления. Показана принципиальная возможность определения физических свойств смеси по известным свойствам смешиваемых компонентов, разработан алгоритм такого определения и проверена его эффективность при определении плотности и температуры смеси.

Дальнейшее развитие направления исследования связано с экспериментальной проверкой результатов теоретического моделирования на конкретных процессах смешивания, более детальным исследованием изменения свойств смеси и смешиваемых компонентов непосредственно во время смешивания и численное (компьютерное) моделирование процесса смешивания.

#### Список источников информации / References

1. Котляр О. В. Визначення впливу поверхнево-активних речовин на стабілізацію суспензій / О. В. Котляр, А. Б. Горальчук // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь, – 2013. – Вип. 13., т. 1. – С. 50–55.

Kotliar, O., Goralchuk, A. (2013), "Determination of the effect of surfactants on suspension stabilization", *Proceedings of the Tavriysk State Agrrotechnical University* ["Vyznachennia vplyvu poverkhnevo-aktyvnyh rechovyv na stabilizatsiu suspensii"], *Praci Tavrijskogo derzhavnogo agrotekhnologichnogo universitetu*, TDATU, Melitopol, Iss. 13, Vol. 1, pp. 50-55.

2. Экспериментальное определение реологических свойств продуктов питания детей раннего возраста / В. М. Тверье, М. И. Шмурак, Ю. И. Няшин и др. // Российский журнал биомеханики. – Пермь, 2008. – Т. 12, № 2. – С. 23–30.

Tver'e, V., Shmurak, M., Niashin, U., Simanovskaia, E., Lebedev A. et al. (2008), "Experimental determination of rheological properties of food products of young children", *Russian Journal of Biomechanics* ["Experimentalnoe opredelenie reologicheskikh svoistv produktov pitaniia detei rannego vozrasta"], *Rossiiskii zhurnal biomekhaniki*, PNIPIU, Perm, Vol. 12, No. 2, pp. 23-30.

3. Мурликіна Н. В. Визначення реологічних властивостей м'яких фаршів з емульгаторами ацилгліцеринної природи / Н. В. Мурликіна, М. О. Янчева // Прогресивні техніка та технології харчових виробництв ресторанного господарства і торгівлі. – Харків : ХДУХТ, 2013. – Вип. 2. – С. 31–42.

Murlykina, N., Yancheva, M. (2013), "Determination of the rheological properties of meat minced meat with emulsifiers of acylglycerin nature", *Progressive technology and technologies of food production of restaurant industry*

and trade ["Vyznachennia reologichnykh vlastyvopei myasnykh farshiv z yemulgatoramy atsyglitserynnoi pryrody". *Progresyvmi tekhnika ta tekhnologii kharchovykh vyrobnytstv restorannogo gospodarstva i torgovli*], KHDUKHT, Kharkiv, Vol. 2, pp. 31-42.

4. Циб В. Г. Аналіз методів оцінювання якості змішування рідких компонентів при виробництві безалкогольних напоїв / В. Г. Циб, О. В. Полудненко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь, 2014. – Вип. 14, т. 1. – С. 7–12.

Tsyb, V., Poludnenko, O. (2014), "Analysis of methods for assessing the quality of the mixing of liquid components in the production of soft drinks", *Proceedings of the Tavriysk State Agrotechnical University* ["Analiz metodiv otsiniuvannya yakosti zmishuvannya ridkykh komponentiv pry vyrobnytstvi bezalkogolnykh napoiv", *Praci Tavrijskogo derzhavnogo agrotekhnologichnogo universitet*], TDATU, Melitopol, Iss. 14, Vol. 1, pp. 7-12.

5. Остриков А. Н. Исследование теплофизических и реологических свойств сливочно-растительного спреда / А. Н. Остриков, А. В. Горбатова, П. В. Филипцов // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – Воронеж, 2016. – Вип. 2. – С. 22–27.

Ostrikov, A., Gorbatova A., Filiptsov P. (2016), "Investigation of thermophysical and rheological properties of cream and vegetable spread", *Bulletin of Voronezh State University of Engineering Technology* ["Issledovanie teplofizicheskikh i reologicheskikh svoistv slivochnj-rastitel'nogo spreda", *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta inzhenernykh tekhnologii*], VGUIT, Voronezh, Vol. 2, pp. 22-27.

6. Самойчук К. О. Визначення вмісту цукрового сиропу в напої при змішуванні у протитечійно-стуминному апараті / К. О. Самойчук, В. В. Паніна, О. В. Полудненко // Наукові праці Одеської національної академії харчових технологій. – Одеса, 2016. – Вип. 1, т. 80. – С. 164–169.

Samochuk, K., Panina, V., Poludnenko O. (2016), "Determination of the content of sugar syrup in the beverage when mixed in antitussive stomach apparatus", *Scientific works of Odessa National Academy of Food Technologies* ["Vyznachennia vmistu tsukrovogo syropu v napoi pry zmishuvanni u protytechii-no-stumynnomu aparati", *Naukovi pratsi Odeskoi natsionalnoi akademii kharchovykh tekhnologii*], ONAKHT, Odesa, Iss. 1, Vol. 80, pp. 164-169.

7. Шевцов А. А. Моделирование процесса смешивания бинарной композиции в лопастном смесителе / А. А. Шевцов, Л. И. Лыткина, И. Б. Чайкин // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – Воронеж, 2008. – Вип. 1. – С. 86–92.

Shevtsov, A., Lytkina, L., Chaikin, I. (2008), "Modeling of mixing process of binary composition in blade mixer", *Bulletin of Voronezh State University of Engineering Technology* ["Modelirovanie protsessa smeshivaniia binamoj kompozitsii v lopastnom smesitele", *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta inzhenernykh tekhnologii*], VGUIT, Voronezh, Vol. 1, pp. 86-92.

8. Зеленина Л. И. Методы математического моделирования пищевых смесей [Электронный ресурс] / Л. И. Зеленина // Исследования в области

естественных наук. – 2014. – № 11. Режим доступа : <http://science.snauka.ru/2014/11/8512>

Zelenina, L., "Methods of mathematical modeling of food mixtures" ["Metody matematicheskogo modelirovaniia pishchevykh smesei"], available at <http://science.snauka.ru/2014/11/8512>

**Погожих Микола Іванович**, д-р техн. наук, проф., зав. кафедри фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Ключківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. Тел.: (057)349-45-86; e-mail: [padnip@gmail.com](mailto:padnip@gmail.com)

**Погожих Николай Иванович**, д-р техн. наук, проф., зав. кафедры физико-математических и инженерно-технических дисциплин, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Ключковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. Тел.: (057)349-45-86; e-mail: [padnip@gmail.com](mailto:padnip@gmail.com)

**Pogozhikh Micola**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department of Physics, Mathematics and Engineering Subjects, Kharkiv State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkiv, Ukraine, 61051. Tel.: (057)349-45-86; e-mail: [padnip@gmail.com](mailto:padnip@gmail.com)

**Торяник Дмитро Олександрович**, канд. фіз.-мат. наук, доц., кафедра фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Ключківська, 333, м. Харків, Україна. Тел.: (057)349-45-46; e-mail: [datory@gmail.com](mailto:datory@gmail.com)

**Торяник Дмитрий Александрович**, канд. физ.-мат. наук, доц., кафедра физико-математических и инженерно-технических дисциплин, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Ключковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. Тел.: (057)349-45-86; e-mail: [datory@gmail.com](mailto:datory@gmail.com)

**Torianik Dmytro**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Physical, Mathematical and Engineering Subjects, Kharkiv State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkiv, Ukraine, 61051. Tel.: (057)349-45-86; e-mail: [datory@gmail.com](mailto:datory@gmail.com)

DOI: 10.5281/zenodo.1307083